Si $\mathring{V}(P)$ est non vide, cet ouvert contient une boule $B(a,r)$ pour $\| \|_\infty$

Or $B(a,r) = \{(z_i) \in \mathbb{C}^n \mid |z_i - a_i| < r, i = 1..n\}$

$= D(a_1,r) \times \dots D(a_n,r)$ produit de parties infinies

Selon le th. précédent, $P = 0$, absurde

Ex Soit $P \in \mathbb{C}[X,Y]$, non constant. Alors $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 / P(x,y) = 0\}$ est infini

S/ $P(X,Y) = \sum_{k=0}^{n} Q_k(X) Y^k$, * si $n = 0$ $Q_0(X) \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$

donc possède une racine (au moins), soit a.

$\{a\} \times \mathbb{C} \subset V(P)$

compendre

$n \geq 1$ $Q_n \neq 0$: $A = \{a \in \mathbb{C} \mid Q_n(a) \neq 0\}$ est infini

Si $a \in A$, $z \to \sum_{k=0}^{n} Q_k(a) z^k$ est un polynôme de degré n

il s'annule (en n points avec multiplicité)

il existe $b_1, \dots, b_n$ tq $(a, b_1), \dots, (a, b_n)$

Comme A est infini $V(P)$ est infini

Rq Si $n \geq 1$ $Q_n = \lambda \neq 0$. $P(X,Y) = \lambda Y^n + Q_{n-1}(X) Y^{n-1}$

$+ \dots + Q_0(X)$

V Compacité:

A) Valeurs d'adhérences

On adopte le cas réel / complexe à (X,d) un espace métrique

Th-Déf Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Soit $a \in X$. Les props suivantes sont équivalentes :

1) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N$ et $\underline{x_n \in B(a, \varepsilon)}$
$d(x_n, a) < \varepsilon$

2) Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des indices n tq $d(x_n, a) < \varepsilon$ est non majoré (ie : infini)

3) $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $x_{\varphi(n)} \to a$

D/ 3 ⇒ 1 ⇒ 2 clair
(2) ⇒ (3) : Base dénombrable de voisinage

important

On construit φ par récurrence sur n
$\underline{n = 0}$ on choisit $\varphi(0)$ tq $x_{\varphi(0)} \in B\left(a, \frac{1}{0+1}\right)$

Supposons construits $\varphi(0) \dots \varphi(n)$, $\varepsilon = \frac{1}{2+n}$

$\left\{ m \in \mathbb{N} \mid x_m \in B\left(a, \frac{1}{n+2}\right)\right\}$ est infini

On choisit dans cet ensemble $\varphi(n+1)$ tq $\varphi(n+1) > \max(\varphi(0) \dots \varphi(n))$

Alors $\left|\begin{array}{l} \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ d(a, x_{\varphi(n)}) \to 0,\ (x_n) \to a \end{array}\right.$

Prop : $\mathrm{Adh}(x_n) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n \mid n \geq p\}}$

D/ Notons $A_p = \{x_n \mid n \geq p\}$ il vient $\overline{A_{p+1}} \subset \overline{A_p}$
$A_{p+1} \subset A_p$

⊂ Soit $a \in \mathrm{Adh}(x_n)$ Soit $\varepsilon > 0$, $p \in \mathbb{N}$
On veut $a \in \overline{A_p}$?

On sait qu'il existe $n \geq p$ tq $x_n \in B(a,\varepsilon)$ ie $A_p \cap B(a,\varepsilon) \neq \emptyset$

Donc $a \in \overline{A_p}$

$\supset$ Soit $b \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$. On veut $b \in Adh(u_n)$?

Soit $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$; comme $b \in \overline{A_N}$, $B(b,\varepsilon) \cap A_N$ est non vide.

$\exists n \geq N : x_n \in B(b,\varepsilon)$ ✓

$\rightarrow Adh(u_n) = \bigcap \overline{\{u_n, \dots\}}$

3) Defs, props structurelles :

Def : L'espace metrique (X,d) est dit compact lorsque toute suite de pts de X admet une valeur d'adhérence

La partie A de X est dite compacte si elle l'est pour la distance induite

⚠ Dans ce cas, si $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$, il existe $a \in A$ et $\varphi \nearrow_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ tq $u_{\varphi(n)} \rightarrow a$.

[A relativement compacte par def, $\bar{A}$ est compact]

Ex $[a,b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$

contrex : $\mathbb{R}$ n'est pas compact pour $|\,|$. $u_n = n$ $\forall n$
($\overline{\mathbb{R}}$ est compact pour $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$
$\arctan +\infty = \pi/2$, $-\infty = -\pi/2$)

Props:

1) Si A est une partie compacte de l'em X, A est fermé et borné

D/ * Soit $a \in \bar{A}$. Il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tq $u_n \to a$
et (la def de A compact) $\exists b \in A$ $\exists \varphi_N$ / $u_{\varphi(n)} \to b$

Alors par séparation $b = a$ et $a \in A$

Si A est non borné il existe $x \in X$, $a_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $d(x, a_n) \to +\infty$ ⇒ pas de sous-suite cv

2) Soit A une partie de l'em compact de X. Alors

A est compact

⇕

A est fermé

D/ (⇓) Tj vrai (⇑) Soit $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$, (u_n) possède dans le compact X une VA, il vient $a \in \bar{A}$ or $\bar{A} = A$ donc $a \in A$ AQT

3) Produit d'espace compacts:

Prop: Soient $X_1, \dots, X_p$ evt bornés de em compacts. Alors l'espace produit est compact

D/ $p = 2$, Soit $(x_n, y_n) \in (X_1, X_2)^{\mathbb{N}}$

X_1 compact: $\exists \varphi$, $a \in$; $x_{\varphi(n)} \to a$

on a $y_{\varphi(n)}$

$\exists \psi$: $y_{\varphi(\psi(n))} \to b$, $b \in A$

Alors $(x_{\varphi \circ \psi(n)}, y_{\varphi \circ \psi(n)}) \to (a, b)$

On procède par récurrence

Th: Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ muni de $\| \ \|_\infty$. A est compacte ssi A est fermé borné

D/ $(\Rightarrow)$ La condition est, d'après ce qui précède (1) nécessaire.
A étant borné, il existe $M > 0$ tq $\forall x \in A$, $\|x\|_\infty \leq M$
ie $A \subset [-M, M]^n$. Or $[-M, M]$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc $[-M,M]^n$ est compact. A est donc fermé dans un compa

RM: Soit E un $\mathbb{K}$-ev. N_1, N_2 deux normes $\sim$ sur E.
Soit A une partie de E $\Updownarrow$ A est compacte pour N_1 / A est compact pour N_2 } VA

~~pa~~ suite

même suite CV, même VA

Par équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$, si N est une norme qque sur ledit ev $A \subset \mathbb{R}^n$, on a :

$\Updownarrow$ A est compact
A est fermé borné pour N

⚠ Faux en dim ∞

Ex: $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ $\|f\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |f|^2\right)^{1/2}$

Soit $f_n : x \mapsto \sin nx$.

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} \, dx = \pi$$

pour $m \neq n$, $\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_0^{2\pi} f_n^2 + f_m^2 - 2 f_n f_m$
$= 2\pi$

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = 2\pi$$

Soit $\varphi_{\mathbb{N}} \nearrow^{\mathbb{N}}$ il vient $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n+1)}\| = \sqrt{2\pi}$
donc $(f_{\varphi(n)})$ diverge

B) Suites dans un compact:

TR(HP) ; Tout un compact (X,d) est complet

D/ Soit $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$, de Cauchy. Puisque X est compact, il existe $\varphi_{\mathbb{N}} \nearrow^{\mathbb{N}}$ et $a \in X$ tq $u_{\varphi(n)} \to a$. Soit $\varepsilon > 0$ il existe par hyp $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon$ $\forall m \geq n_\varepsilon$
$d(u_n, u_m) \leq \varepsilon$

Prenons $p \in \mathbb{N}$ tq $\begin{cases} \varphi(p) \geq n_\varepsilon \\ d(u_{\varphi(n)}, a) \leq \varepsilon \end{cases}$

Si $n \geq n_\varepsilon$ il vient $d(u_n, a) \leq d(u_n, u_{\varphi(n)}) + d(u_{\varphi(p)}, a) \leq 2\varepsilon$

⚠ Réciproque fausse $X = \mathbb{R}$

(HP) **Th** Soit $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ avec X compact
Alors u_n converge $\Leftrightarrow$ (u_n) possède au plus une Va

D/ $\Downarrow$ immédiat (l'écrire)

Plus de travail. $\Uparrow$ On sait par compacité de X que (u_n) possède au moins une Va.
supposons $u_n \not\to a$. alors il existe $\varepsilon > 0$ tq
$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N\ d(u_n, a) \geq \varepsilon$
ie $\{n \in \mathbb{N} \mid d(u_n, a) \geq \varepsilon\} = P$ est infini

connexe : ne peut pas être séparé en deux fermés disjoints

J'aime les suites

Revoir les exo sur les suites réelles correspondantes

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to P$ une bijection ?

La suite $V_n = U_{\varphi(n)}$ possède une VA. Soit $b \in X$

donc $\exists \psi_{\mathbb{N}} \nearrow \mathbb{N}$ $V_{\psi(n)} \to b$, $U_{(\varphi \circ \psi(n))} \to b$

$d(V_{\psi(n)}, a) \geq \varepsilon \Rightarrow d(b, a) \geq \varepsilon$

(CC) b est une VA de (U_n) avec $b \neq a$, absurde.

$\text{Ré}(e^{2i\pi n\alpha})$

$= U$

$d(e^{2i\pi n\alpha}, \text{Adh}(U)) \to 0$

Ex : (CEN) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^d$ tq i) u_n est bornée

ii) u_n possède un nbre fini de VA iii) $u_{n+1} - u_n \to 0$

Mq (u_n) CV

S/ Notons $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ les va distinctes de (u_n)

On va mq $p = 1$. Soit $\alpha = \min\limits_{i \neq j} \|a_i - a_j\| > 0$

$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \|u_{n+1} - u_n\| < \alpha/3$

on cherche une nouvelle VA

On va Mq ~~...~~ $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \notin \bigcup_{k=1}^{p} B(a_i, \alpha/3)\}$ est infini $\circledast$

Soit $N_1 \geq N$, il existe $n_0 > N_1$ tq $u_{n_0} \in B(a_1, \alpha/3)$

$n_1 > n_0$ tq $u_{n_1} \in B(a_2, \alpha/3)$ (VA)

Soit $k = \max\{l \mid n_0 \leq l \leq n_1 \text{ et } u_k \in B(a_1, \alpha/3)\}$

On a $k < n_1$ et $a_{k+1} \notin B(a_i, \alpha/3)$. Si $a_{k+1} \in B(a_2, \alpha/3)$

il vient $d(a_1, a_2) \leq d(a_2, u_k) + d(u_k, u_{k+1}) + d(u_{k+1}, a_2) < \frac{2\alpha}{3}$

Fin : Soit $\varphi \, \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}\ U_{\varphi(n)} \notin \bigcup B(a_i, \alpha/3)$ Alors

$u_{\varphi(n)}$ bornée $\subset [-M, M]^d \Rightarrow \exists \psi\ \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ $u_{\varphi \circ \psi(n)} \to b \notin \bigcup B(a_i,$

Exercices : ① Soit $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$, X compact. Mq

$d(u_n, \mathrm{Adh}(u_n)) \longrightarrow 0$

S/ $\mathrm{Adh}(u_n) = A$ fermé dans X. Par l'absurde, si $\varepsilon_n = d(u_n, A)$ ne tend pas vers 0

$\exists \delta > 0 : P = \{n \in \mathbb{N} \mid \varepsilon_n \geq \delta\}$ est infini

Soit $\varphi_{\mathbb{N}} \nearrow^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans P, il vient $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(u_{\varphi(n)}, A) \geq \delta$

Or $b \in A$ ✓

② Soit X un evn compact, et $f \in \mathcal{C}(X, X)$

Soit $u_n \left| \begin{array}{l} u_0 \in X \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$; $A = \mathrm{Adh}(u_n)$. Mq $f(A) = A$

S/ $f(A) \subset A$: Soit $a \in A$, $\exists \varphi_{\mathbb{N}} \nearrow^{\mathbb{N}}$ tq $u_{\varphi(n)} \longrightarrow a$
Alors par $\mathcal{C}^0$ de f, $u_{\varphi(n)+1} = f(u_{\varphi(n)}) \longrightarrow f(a)$

et donc $f(a) \in A$

Cas $\underline{A \subset f(A)}$? : On reprend a, φ...

Soit $\psi_0 : n \longrightarrow \varphi(n) - 1$

Soit $\psi_{\mathbb{N}} \nearrow^{\mathbb{N}}$ tq $u_{\varphi_0 \circ \psi(n)} \longrightarrow b$ (usuel), alors

par $\mathcal{C}^0$ de f, $\underline{f(u_{\varphi_0 \circ \psi(n)})} = f(u_{\varphi(\psi(n)) - 1})$
$\longrightarrow f(b)$ $\quad \left(= u_{\varphi(\psi(n))} \longrightarrow a \right.$, $a = f(b)$

n°13), Absurde

$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$

(3) Graphe fermé X et Y sont deux EM

a- Si $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ mq Γ_f est fermé dans $X \times Y$

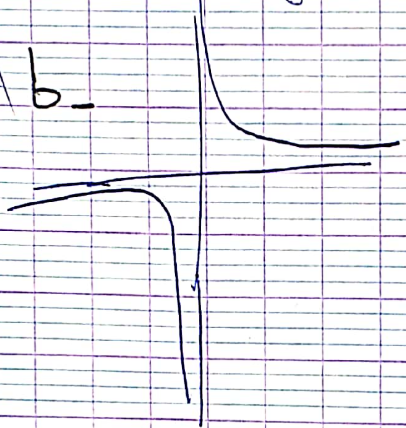
b- Donner X, Y, f avec $\begin{cases} f \text{ discontinue} \\ \Gamma_f \text{ fermé} \end{cases}$

c- On suppose Y compact, mq Γ_f fermé $\Rightarrow f$ $\mathcal{C}^0$

S/ a- Soit $(a,b) \in \overline{\Gamma_f}$ il existe $(x_n, y_n) \in \Gamma_f^{\mathbb{N}}$ $(x_n, y_n) \to (a,b)$

$y_n = f(x_n)$, Alors $x_n \to a$, $f(x_n) \to b$ mais f est $\mathcal{C}^0$ donc $b = f(a)$

b-



$x \neq 0$ $f(x) = \frac{1}{x}$

$f(0) = 0$

$\Gamma_f = \{xy - 1 = 0\} \cup \{(0,0)\}$

Méthode utile

c- Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tq $(x_n) \to a$. On veut mq $f(x_n) \to f(a)$ (?)

Pour cela, IS de prouver qu'il y a au plus une VA

Soient $\begin{cases} b \in Y \\ \varphi_{\mathbb{N}} \nearrow \mathbb{N} \end{cases}$ tq $f(x_{\varphi(n)}) \to b$

(HYP) $\Gamma_f = \overline{\Gamma_f}$ donne $(a,b) \in \Gamma_f$ et donc $b = f(a)$

(4) unif continuité

Th: (Heine) Soit X, Y deux em, $f \in \mathcal{C}(X,Y)$.

Si X est compact f est uniformément continue.

$f : X \to Y$

D/ Raisonner par l'~~abs~~ absurde, on se donne $\varepsilon > 0$

$x_n, x'_n \in X^{\mathbb{N}}$ tq $\left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, d(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon \\ d(x_n, x'_n) \to 0 \end{array} \right.$

X compact $\exists \varphi_{\mathbb{N}} \nearrow^{\mathbb{N}}$ $\exists a \in X$, $x_{\varphi(n)} \to a$

Comme $d(x_{\varphi(n)}, x'_{\varphi(n)}) \to 0$, il vient $x'_{\varphi(n)} \to a$

par $\mathcal{C}^{te}$ de f, $\left| \begin{array}{l} f(x_{\varphi(n)}) \to f(a) \\ f(x'_{\varphi(n)}) \to f(a) \end{array} \right\}$ donc $d(f(x_{\varphi(n)}), f(x'_{\varphi(n)})) \to 0$

Absurde.

Ex: (Contrôle) Soit $f [0,1]^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}$, Mq

$\varphi : \begin{pmatrix} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sup\limits_{y \in [0,1]} f(x,y) \end{pmatrix}$ est $\mathcal{C}^0$.

S/ Soit $\varepsilon > 0$, la compacité de $[0,1]^2$ donne la continuité de f ce qui donne l'unif $\mathcal{C}^0$ de f

$\exists \eta > 0$ $\forall (x,y)$ $(x',y') \in [0,1]^2$, $\max(|x-x'|, |y-y'|) \leq \eta$

$\Rightarrow |f(x,y) - f(x',y')| \leq \varepsilon$

Soient $a, a' \in [0,1]$ avec $|a-a'| \leq \eta$

Why?

Pour tout $y \in [0,1]$ $\|(a,y) - (a',y)\|_\infty \leq \eta$ donc

$f(a,y) - \varepsilon \leq f(a',y) \leq f(a,y) + \varepsilon$

De là $\forall y\ f(a',y) \leq \varphi(a)+\varepsilon$

$\varphi(a') \leq \varphi(a)+\varepsilon$ | $\varphi(a) \leq \varphi'(a)+\varepsilon$

Bref: $|\varphi(a)-\varphi(a')| < \varepsilon$

E) Optimisation sur un compact :

trouver max et min d'une fct

Th : Soient (X,d), (Y,δ) deux e.m, et $f \in \mathcal{C}(X,Y)$

a. Si X est compact, $f(X)$ est compact

b. Si $X \neq \emptyset$ et $Y=\mathbb{R}$, f est bornée et atteint ses bornes (compact)

(Si Y est un evn, $x \mapsto \|f(x)\|$ est bornée et atteint ses bornes)

D/ a. Soit $(y_n) \in f(X)^{\mathbb{N}}$, il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}\ f(x_n)=y_n$

Comme X compact, il existe $\varphi \nearrow \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $a \in X$ tq $x_{\varphi(n)} \to a$

f est $\mathcal{C}^0$, $f(x_{\varphi(n)}) \to f(a)$, $f(X)$ est compact.

b. $f(X)$ est un compact non vide de $\mathbb{R}$ d'après A ; il est donc fermé borné (et $\neq \emptyset$), $c = \sup f(X)$ est limite d'une suite $y_n \in f(X)^{\mathbb{N}}$, or $f(X)$ est fermé donc $c \in f(X)$.

Idem pour l'inf.

Cor : Si X compact, F fermé dans X, et $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, $f(F)$ est fermé dans Y (En effet, F compact $\Rightarrow f(F)$ compact $\Rightarrow f(F)$ fermé)

Ex①: (Poincaré) Soient X un espace compact, $f : X \xrightarrow{\mathcal{C}^0} Y$ et bijective. Alors f^{-1} est $\mathcal{C}^0$

S/ On sait que Y est compact en tant qu'image $\mathcal{C}^0$ d'un compact

Soit F un fermé de X. On veut que $(f^{-1})^{-1}(F)$ soit fermé dans Y

Mais $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ car f est bijective.
Or, avec le corollaire, $f(F)$ est compact dans Y, donc fermé dans Y
$\Rightarrow$ caractérisation des $\mathcal{C}^0$ par image réciproque de fermé (c.f p142)

S_2/ Soit $y_n \in Y^{\mathbb{N}}$, avec $y_n \to b$. On écrit (HYP) $\left| \begin{array}{l} x_n = f^{-1}(y_n) \\ a = f^{-1}(b) \end{array} \right.$

On veut $x_n \to a$ (?). Soit a' une V.A de (x_n), $a' = \lim_{+\infty} x_{\varphi(n)}$. Comme f est $\mathcal{C}^0$, $f(x_{\varphi(n)}) = y_{\varphi(n)} \to f(a')$

donc $b = f(a')$ et $a = a'$

(CC) $\mathrm{Adh}(x_n) = \{a\}$.

S_3/ Γ_f fermé dans $X \times Y \Rightarrow \Gamma_{f^{-1}}$ fermé dans $Y \times X$ $\left\{ \begin{array}{l} (x,y) \to (y,x) \\ X \times Y \to Y \times X \end{array} \right.$

$\underset{X \text{ compact}}{\Rightarrow} f^{-1}$ est $\mathcal{C}^0$

Ex : Soit $f, g \in \mathcal{C}([0,1],[0,1])$ tq $f \circ g = g \circ f$

Mq $\exists a \in [0,1] : f(a) = g(a)$
S/ Soit $A = \{x \in [0,1] : g(x) = x\}$

i) A est non vide car $g(0) - 0 \geq 0$, $g(1) - 1 \leq 0$ + TVI

ii) A est fermé car g est $\mathcal{C}^0$
C'est donc un fermé du compact $[0,1]$, donc A possède $\alpha = \inf A$, $\beta = \sup A$. $g(\alpha) = \alpha$, $g(\beta) = \beta$
or $f(g(\alpha)) = f(\alpha) = \underbrace{g(f(\alpha))}_{f(\alpha)}$ donc α est un point fixe.

de même $f(\beta) \in A$

On regarde $f-g$: $(f-g)(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \geq 0$, $(f-g)(\beta) = f(\beta) - \beta \leq 0$

donc TVI : $f-g$ s'annule. , OK.

(correctement, $f-g$ C^0 et $[0,1]$ connexe)

Ex : Sommes.

① Soient A et B deux parties de l'evn E :

$A+B = \{ c \in E \mid \exists (a,b) \in A \times B \quad c = a+b \}$

a- Si l'un de A, B est ouvert, mq A+B ouvert

b- Soit A et B sont compacts alors A+B est compact

c- Si A est compact et B fermé alors A+B est fermé

(faux) d- Si A et B fermés alors A+B fermé

S/ a- Soit $c = a+b \in A+B$, B ouvert par ex, il existe ε

tq $B(b,\varepsilon) \subset B$: $a + B(b,\varepsilon) = B(a+b,\varepsilon) \subset A+B$

b- Soit $f \begin{pmatrix} A \times B \to A+B \\ (a,b) \mapsto a+b \end{pmatrix}$.

f est C^0 donc $f(\underbrace{A \times B}_{\text{compact en tant que produit de 2 compacts}})$ est compact

c- Soit $c_n \in (A+B)^{\mathbb{N}}$ tq $c_n \to c$

$c_n = a_n + b_n$, $(a_n, b_n) \in A \times B$

A compact : $\exists \varphi_{\mathbb{N}} \nearrow^{\mathbb{N}}$ $\exists a \in A$ $a_{\varphi(n)} \to a$

$\sqrt{3} = u + v\sqrt{2}$

Opt

A compact $\exists \varphi \; \mathbb{N}^{\nearrow \mathbb{N}}$ $\exists a \in A$, $a_{\varphi(n)} \to a$

comme $b_{\varphi(n)} = c_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}$, $b_{\varphi(n)} \to b = c - a$

Or B est fermé $b \in \overline{B} = B$ bref $c = a + b \in A+B$

d- FAUX $\left| \begin{array}{l} A = \mathbb{Z} \\ B = \sqrt{2}\mathbb{Z} \end{array} \right.$ $\overline{A+B} = \mathbb{R}$ et $A+B \neq \mathbb{R}$

Ex X est un e.m compact $\neq \emptyset$ Soit $f : X \to X$ tq
$\forall (x,y) \in X^2, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ $\{ f(x) = \ldots$

a) Mq $\exists ! \ell \in X, f(\ell) = \ell$

b) ~~Mq $\exists \ell$, $f(\ell) = \ell$~~ $u_0 \in X$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Mq $u_n \to \ell$

S/ a- ABS ie $\forall x \in X, f(x) \neq x$, $d(x, f(x)) > 0$

$\varphi : x \mapsto d(x, f(x))$ est $\mathcal{C}^0$ $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |d(x, f(x)) - d(y, f(y))|$

$\leq |d(x, f(x)) - d(y, f(x))|$
$+ |d(y, f(x)) - d(y, f(y))|$
$\leq d(x,y) + d(f(x), f(y))$

$\leq 2 d(x,y)$

donc φ $\mathcal{C}^0$.

X étant compact $\exists a \in X$ $\varphi(a) = \inf\limits_{x \in X} \varphi(x)$

on a $d(f(a), f\circ f(a)) < \underbrace{d(a, f(a))}_{\min}$, absurde

unicité de ℓ : si $f(\ell') = \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$

$$\underbrace{d(f(\ell), f(\ell'))}_{d(\ell, \ell')} < d(\ell, \ell')$$

b. On suppose $u_n \neq \ell$, il vient $d(u_{n+1}, \ell) = d(f(u_n), f(\ell)) < d(u_n, \ell)$

[0,1] → [0,1] ∪ [2,3]

si $\forall n, u_n \neq \ell$ il vient $d(u_n, \ell) \searrow$

$\alpha = \lim\limits_{+\infty} d(u_n, \ell)$

si $\alpha = 0$, GG

ABS $\alpha > 0$: Soit $a \in \mathrm{Adh}(u_n)$, $a = \lim\limits_{n\to\infty} u_{\varphi(n)}$, il

vient par $\mathcal{C}^0$ de $d(\ell, \cdot)$, $d(\ell, a) = \lim\limits_{n\to\infty} d(\ell, u_{\varphi(n)}) = \alpha$

appliquons f : $d(f(\ell), f(a)) < d(\ell, a) = \alpha$

mais $f(a)$ est aussi une VA donc $d(f(a), \ell) = \alpha$ Absurde

Compléments (X, d) est un e.m complet

① Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_1, \dots, a_p \in X$ tq

$X = \bigcup B(a_i, \varepsilon)$

ouvert et fermé de X

D/ Par l'absurde $\forall p \in \mathbb{N}^* \ \forall (a_1, \dots, a_p) \in X^p \ X \supsetneq \bigcup_1^p B(a_i, \varepsilon)$

Soit $a_1 \in X$ Il existe $a_2 \in X \setminus B(a_1, \varepsilon)$

⋮

$a_{p+1} \in X \setminus \left(\bigcup_1^p B(a_i, \varepsilon)\right)$

Si $q < p$ tq $a_p \in X \setminus \left(\bigcup_1^q B(a_i, \varepsilon)\right)$ donc $d(a_p, a_q) \geq \varepsilon$

si $\varphi_{N} \nearrow^{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $d(a_{\varphi(n+1)}, a_{\varphi(n)}) \geq \varepsilon$

$a_{\varphi(n)}$ ne peut converger, il n'y a pas de VA.

<u>Ex</u> (ε-réseaux et isométries)

a- Soit $\varepsilon > 0$ Mq $\exists N \in \mathbb{N}^* \exists (x_1, \ldots, x_N) \in X^N$

$\forall i \neq j, d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ (*)

et tq toute famille $y_1, \ldots, y_n$ des points de X vérifiant (*) est de cardinal $n \leq N$.

b- Soit $f : X \to X$ une isométrie. Mq f est surjective

S/ a) Soit $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \exists (y_1, \ldots, y_n)$ tq (*)$\}$ | $1 \in A$ vrai Mq A est majoré (?)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_p \in X$ tq $X = \bigcup_1^p B(a_i, \varepsilon/2)$

Supposons que l'on ait $n \in A$ $n > p$.

d'après le principe des tiroirs : $\exists i \neq j$ $k \leq p$: $y_i \in B(a_k, \varepsilon/2)$
$y_j \in B(a_k, \varepsilon/2)$

$\Rightarrow d(y_i, y_j) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

b- Soit $\varepsilon > 0$, $x_1, \ldots, x_N$ tq (*), notons $y_i = f(x_i)$
$i = 1 \ldots N$

f étant isométrique, il vient : $\forall i \neq j, d(y_i, y_j) \geq \varepsilon$

Mq $X = \bigcup_1^N B(y_i, \varepsilon)$ (?) : Si $X \setminus \bigcup_1^N B(y_i, \varepsilon) \neq \emptyset$

on choisit z dans cet ensemble, et $(y_1, \dots, y_N, z)$ vérifie ⊛

(CC) $\{y_1, \dots, y_N\} \subset f(X)$, donc $\forall z \in X$, $d(z, f(X)) \leq \varepsilon$

ou encore $\forall z \in X$, $z \in \underbrace{\overline{f(X)}}_{\text{compact}} = f(X)$

Fermés emboîtés

Th : Soit (F_n) une suite décroissante de fermés $\neq \emptyset$ du compact X. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

D/ Soit $x_n \in F_n$: On a donc, par décroissance des F_n, $x_n \in F_0, \dots, F_n$

Soit $\varphi_{\mathbb{N}}^{\nearrow \mathbb{N}}$ et $a \in X$ (compact) $\hookrightarrow x_{\varphi(n)} \to a$

Soit $p \in \mathbb{N}$ pour $n \geqslant p$, il vient $\varphi(n) \geqslant \varphi(p) \geqslant p$ et donc $x_{\varphi(n)} \in F_p$

$n \to +\infty$ $a \in \overline{F_p} \overset{hyp}{=} F_p$

donc $\forall p \in \mathbb{N}$ $a \in F_p$ OK

APL (Th de $\overset{lol}{\text{(Al)}}$ Dini) Soit X compact, $f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$

$f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ on suppose $\forall x \in X$ $(f_n(x))$ croît vers $f(x)$

Alors la convergence est uniforme

|| Si l'on se donne $\varepsilon > 0$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \geqslant n_\varepsilon \, \forall x \in X$: $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, $0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon$

essentiel : $f \in \mathcal{C}^0$!

D/ On note $F_n = \{x \in X \mid f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon\}$. F_n est fermé dans le compact X.

si $x \in F_{n+1}$ il vient $f(x) - f_{n+1}(x) \geq \varepsilon$

$$\frac{f_{n+1}(x) \geq f_n(x)}{f(x) \geq \varepsilon + f_n(x)} \quad \Big| \text{ ie } x \in F_n$$

Si : i) $\exists n_\varepsilon \mid F_{n_\varepsilon} = \emptyset$

il vient $\forall x \in X\ \forall n \geq n_\varepsilon \mid \underline{F_n = \emptyset}$

$\forall x \in X\ 0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon$

sinon ii) $\forall n \in \mathbb{N}\ F_n \neq \emptyset$

d'après le Th précédent $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

Si $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ il vient :

$\forall n \in \mathbb{N}\ f(a) \geq \underbrace{f_n(a)}_{\to f(a)} + \varepsilon$ Absurde

Chercher contre-ex + / + unif CV

Exercices : ① Mq $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ muni de $d(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x_m - y_m|}{2^m}$ est compact

S/ Soit $(X^p) \in X^{\mathbb{N}}$. On doit trouver une suite φ_0 tq $x_0^{\varphi_0(p)}$ converge vers $a_0 \in [0,1]$

φ_1 tq $x_1^{\varphi_0 \circ \varphi_1}$ ...... Cv vers $a_1 \in [0,1]$

φ_m ! tq $x_m^{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_m}$ Cv vers $a_m \in [0,1]$

Special Skill : Procédé diagonal

* Procédé diagonal. On note $\gamma : p \to \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(p)$

γ est ↗ : $\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_{p+1}(p+1) \geq \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(p+1)$

$\geq \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(p)$

Si $n > p$: $\gamma(n) = (\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p) \circ \underbrace{(\varphi_{p+1} \circ \dots \circ \varphi_n)}_{n \mapsto \varphi_{p+1} \circ \dots \circ \varphi_n \nearrow}(n)$

γ est une extraction de $\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_p$ pour $n > p$

** Convergence Soit $m \in \mathbb{N}$, la coord d'indice m de $X^{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(p)}$ est $x^{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(p)}$, extractrice pour $p \geq m$

$p \mapsto \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(p)$ est extractrice de $q \mapsto \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_m(q)$

donc $x_m^{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(p)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} a_m$

*** On pose $Y^p = X^{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(p)}$

$\forall m \in \mathbb{N}$ $y_m^p \to a_m$. Soit $\varepsilon > 0$, N : $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$, on a

$d(Y^p, a) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|y_m^p - a_m|}{2^m} \leq \sum_{m=0}^{N} \frac{|y_m^p - a_m|}{2^m} + \frac{1}{2^{N+1}} + \dots \leq \sum_{m=0}^{N} \frac{|y_m^p - a_m|}{2^m} + \varepsilon$

Or $\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{|y_n^p - a_n|}{2^n} \to 0$ (somme finie)

donc $\forall p \geq P_\varepsilon$

$\exists P_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall p \geq P_\varepsilon,\ \sum_{n=0}^{N} \frac{|y_n^p - a_n|}{2^n} < \varepsilon$

ie $d(y^p, a) \leq 2\varepsilon$

<u>Ex:</u> Soit $\sum z_n$ une série complexe ACV

on note $K = \{z \mid \exists A \in \mathbb{N},\ z = \sum_{n\in A} z_n\}$. Mq K compact

S/ On note $X_C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de $d(X,Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$

Comme ci-dessus, X_C est compact

TODO

Soit $A \in \mathbb{N}$ $X_A \in X_C$

l'application $f : \begin{pmatrix} X_C \to K \\ \varepsilon_n \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n z_n \end{pmatrix}$ est définie

correctement et est surjective

Soit $\varepsilon > 0$ Soit $X \in X_C$

Dès que $d(X,Y) < \eta$, On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $|x_n - y_n| < 2^n \eta$

si $\eta < \frac{1}{2^N}$, comme $x_n, y_n \in \{0,1\}$ il vient $x_n = y_n$ pour $n = 0, \dots, N$

delà $d(X,Y) < \frac{1}{2^N} \Rightarrow |f(x) - f(y)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n - y_n) z_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |z_n|$